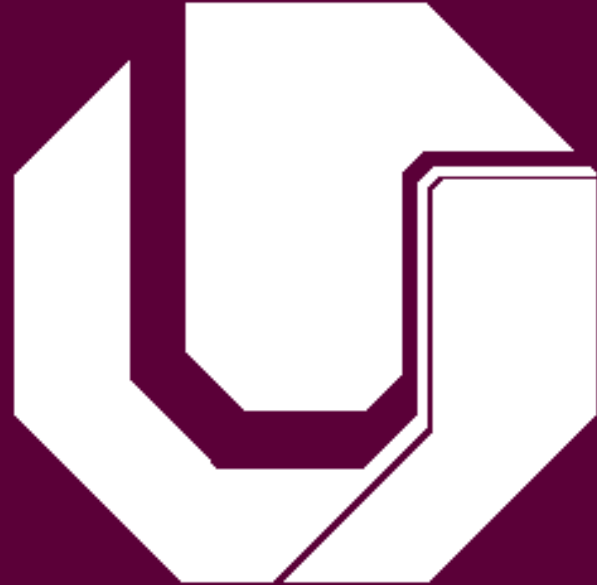




Introdução

Neste trabalho, estamos interessados em discutir...

Seção 1

Vejamos como usar os ambientes para definições, teoremas, corolários.

Definição

Coloque aqui sua primeira definição.

Teorema

Coloque aqui seu primeiro teorema.

Demonstração: Veja [2, Teorema 1 (Pág. 3)].

Corolário

Coloque aqui seu primeiro corolário.

Demonstração: Veja [2, Corolário 2 (Pág. 5)].

Seção 2

Vamos agora dar uma resposta para a primeira pergunta apresentada na Introdução...

Exemplo 1. O conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é equinumeroso à $\mathbb{N}$.

De fato, podemos considerar a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que associa a cada par (m, n) o valor, mostrado na figura abaixo, que se encontra no ponto de coordenadas (m, n) . Observe que a função f é bijetora.

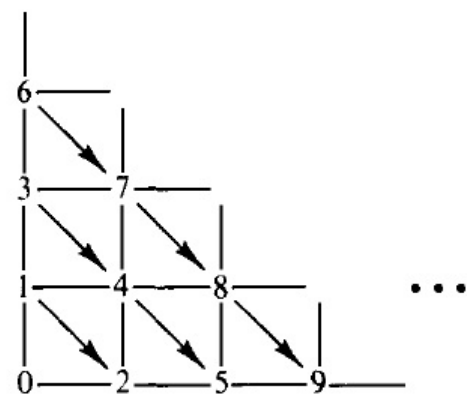


Figura: Legenda da Figura.

Exemplo 3. O intervalo aberto $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$ é equinumeroso à $\mathbb{R}$.

Para provar isto, vamos considerar uma construção geométrica que nos dá uma bijeção, mostrada na figura abaixo. Podemos “dobrar” $(0, 1)$ em um semicírculo com centro P. Cada ponto em $(0, 1)$ está em correspondência com sua projeção na reta real.

Definição

Um conjunto X diz-se *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Nesse caso, f chama-se uma *enumeração* dos elementos de X .

Observe que X é enumerável se, e somente se, X é equinumeroso à $\mathbb{N}$. Pelos Exemplos 1 e 2, temos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis. Ainda obtemos o seguinte resultado.

Teorema

A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração: Veja [2, Corolário 4 (Pág. 8)].

Vejamos na seção a seguir um interessante exemplo relacionado a enumerabilidade de conjuntos.

Seção 3

Segundo [3], o Hotel de Hilbert é um famoso hotel que nunca deixou um viajante sem quarto, isso ocorria por ter infinitos quartos e um engenhoso gerente. Os quartos do hotel são todos numerados utilizando-se os números naturais.



Figura: Desenho do Hotel de Hilbert.

Teorema (Teorema de Cantor)

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não é equinumeroso ao conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Demonstração: Mostraremos que nenhuma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser sobrejetora. Imagine uma lista dos valores de f , expressos como decimais infinitos:

$$f(0) = a_{01} \dots a_{0n_0} b_{01} b_{02} b_{03} \dots$$

$$f(1) = a_{11} \dots a_{1n_1} b_{11} b_{12} b_{13} \dots$$

$$f(2) = a_{21} \dots a_{2n_2} b_{21} b_{22} b_{23} \dots$$

Construiremos um $z \in \mathbb{R}$ que não aparece nessa lista. Tome

$$z = 0, c_1 c_2 c_3 \dots,$$

onde

$$c_j = \begin{cases} 7, & \text{se } b_{j-1,j} \neq 7 \\ 6, & \text{se } b_{j-1,j} = 7. \end{cases}$$

Então, por construção, z é diferente de $f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, f não é sobrejetora.

A grosso modo, esse teorema nos mostra que o conjunto infinito $\mathbb{R}$ é maior que o conjunto infinito $\mathbb{N}$, isto é, o infinito dos reais é maior que o infinito dos naturais.

- **Texto em negrito** Texto aqui
- Item 2;
- Item 3;
- Item 4.

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PPGMAT da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço a CAPES/FAPEMIG pelo fomento.

Referências Bibliográficas

- 1 Herbert B. Enderton, *Elements of set theory*, Academic press, 1977.
- 2 Elon Lages Lima, *Análise Real*, Impa, Volume 1, 2004.
- 3 Desafio: Hotel de Hilbert, <http://clubes.obmep.org.br/blog/desafio-hotel-de-hilbert/>, acessado: 26/09/2019.